

УДК: 517.988.8

О ВОЗМУЩЕНИИ БАНАХОВОГО  $g_{\bar{x}}$ -ФРЕЙМА

М.И.ИСМАЙЛОВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*miqdadismailov1@rambler.ru*

*В работе изучается устойчивость банахового  $g$ -фрейма в банаховом пространстве относительно банахового пространства последовательностей из векторов. Найдены достаточные условия, при которых существует линейный ограниченный оператор, который вместе с системой близкой, в определенном смысле, банаховому  $g$ -фрейму образуют банаховый  $g$ -фрейм. Из результатов полученных в работе, в частных случаях, получаются некоторые известные факты об устойчивости банахового  $g$ -фрейма в банаховом пространстве относительно банахового пространства последовательностей из векторов.*

**Ключевые слова:** фрейм, атомарное разложение, банаховый  $g$ -фрейм.

Известно, что фреймы в гильбертовом пространстве являются обобщениями ортонормированных базисов. Понятие фрейма в гильбертовом пространстве было введено R.J.Duffin и A.C.Schaeffer при изучении негармонических рядов Фурье [1]. Напомним, что система  $\{f_i\}_{i \in N}$  гильбертового пространства  $H$  называется фреймом, если существуют постоянные  $A > 0$  и  $B > 0$  удовлетворяющие условию

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(f, f_i)|^2 \leq B\|f\|^2 \text{ для любого } f \in H.$$

Постоянные  $A$  и  $B$  называются фреймовыми границами. По теории фреймов можно ознакомиться в монографиях [2,3]. Фреймам и их приложениям посвящены многочисленные работы [4-6] и др. Фреймы находят применение в сигнальных процессах, сжатии данных, характеристизации функциональных пространств и в других областях.

Распространение фреймов на случай банаховых пространств принадлежит K.Gröchenig. В [7] введены понятия банахового фрейма и атомарного разложения в банаховых пространствах следующим образом.

Пусть  $X$  - банахово пространство,  $X_d$  - банахово пространство последовательностей из скаляров,  $S: X_d \rightarrow X$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  и  $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ .

Пара  $(\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}; S)$  называется банаховым фреймом в  $X$  относительно  $X_d$ , если выполнены условия

- (i)  $\{x_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \in X_d$  для всех  $x \in X$ ;
- (ii) существуют  $A > 0$  и  $B > 0$  такие, что  $A\|x\|_X \leq \|\{x_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{X_d} \leq B\|x\|_X$  для всех  $x \in X$ ;
- (iii)  $S \in L(X_d, X)$  и  $S(\{x_n^*(x)\}) = x$  для всех  $x \in X$ .

Пара  $(\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}; \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  называется атомарным разложением в  $X$  относительно  $X_d$ , если выполнены условия

- (i)  $\{x_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \in X_d$  для всех  $x \in X$ ;
- (ii) существуют  $A > 0$  и  $B > 0$  такие, что  $A\|x\|_X \leq \|\{x_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{X_d} \leq B\|x\|_X$  для всех  $x \in X$ ;
- (iii)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$  для всех  $x \in X$ .

Банаховые фреймы и атомарные разложения изучались в работах [8,9] и др. С практической точки зрения важным вопросом теории фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах является вопрос устойчивости фрейма. Устойчивость фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах изучалась многими авторами, как, например, [10-14].

Один из обобщений фрейма является понятие  $g$ -фрейма. Понятие  $g$ -фрейма в гильбертовых пространствах было введено в [15]. Банаховый аналог  $g$ -фрейма введено в [13].  $g$ -фреймы и вопросы их устойчивости в гильбертовых и банаховых пространствах исследовались в [13, 16, 17].

В данной работе изучается устойчивость  $g$ -фрейма в банаховом пространстве относительно банахового пространства последовательностей из векторов. Результаты, полученные в работе, являются обобщениями ряда результатов работ [13,17].

### Устойчивость $g_{\tilde{X}}$ -фрейма

Пусть  $X$  и  $Z$  - банаховые пространства,  $\tilde{X}$  -  $BK$ -пространство над  $X$ , т.е. банаховое пространство последовательностей векторов  $X$  с покоординатными линейными операциями. Обозначим через  $\tilde{X}_{\infty}$  и  $\tilde{X}_p$

( $1 \leq p < +\infty$ )  $BK$ -пространства последовательностей  $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$  с соответствующими конечными нормами  $\|\{x_n\}_{n \in N}\| = \sup_n \|x_n\|_X$  и  $\|\{x_n\}_{n \in N}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Определение 1 ([13]).** Пусть система  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  и  $S: \tilde{X} \rightarrow Z$ . Пара  $(\{\varphi_n^*\}, S)$  называется банаховым  $g$ -фреймом в  $Z$  относительно  $\tilde{X}$ , если

- 1)  $\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N} \in \tilde{X}$  для любого  $z \in Z$ ;
- 2) существуют числа  $A > 0, B > 0$  такие, что  $A \|z\|_Z \leq \|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} \leq B \|z\|_Z$  для любого  $z \in Z$ ;
- 3) оператор  $S$  линеен и ограничен на  $\tilde{X}$  и  $S(\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}) = z$  для любого  $z \in Z$ .

Постоянные  $A$  и  $B$  называются фреймовыми границами для  $(\{\varphi_n^*\}, S)$ , а оператор  $S$  оператором восстановления. Далее, банаховый  $g$ -фрейм в  $Z$  относительно  $\tilde{X}$  будем называть банаховым  $g_{\tilde{X}}$ -фреймом в  $Z$ .

Нам понадобится следующее утверждение.

**Теорема 1 ([11]).** Пусть  $G: X \rightarrow X$  линейный оператор. Предположим, что существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$  такие, что

$\|x - G(x)\|_X \leq \lambda_1 \|x\|_X + \lambda_2 \|G(x)\|_X$  для любого  $x \in X$ . Тогда  $G$  ограничен и ограниченно обратим в  $X$  и

$$\frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1} \|x\|_X \leq \|G^{-1}(x)\|_X \leq \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_1} \|x\|_X.$$

Перейдем к изучению возмущения  $g_{\tilde{X}}$ -фреймов в банаховом пространстве.

**Теорема 2.** Пусть  $(\{\varphi_n^*\}, S)$  банаховый  $g_{\tilde{X}}$ -фрейм в  $Z$ , оператор  $U: Z \rightarrow \tilde{X}$  определен по равенству  $U(z) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}$ , система  $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  и  $\{\psi_n^*(z)\}_{n \in N} \in \tilde{X}$  для любого  $z \in Z$ . Предположим, что существуют числа  $\lambda, \beta, \mu \geq 0$  и такие, что

(a)  $\lambda \|US\| + \mu \|S\| + \beta < 1$ ;

(b)  $\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N} - \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{1 - \beta} \|z\|_Z$  для любого  $z \in Z$ .

Тогда, существует  $T \in L(\tilde{X}, Z)$  такой, что  $(\{\psi_n^*\}_{n \in N}, T)$  является банаховым  $g_{\tilde{x}}$ -фреймом в  $Z$ , с границами

$$\frac{[1 - (\lambda\|US\| + \mu\|S\| + \beta)]\|S\|^{-1}}{1 + \beta}, \frac{(1 + \lambda)\|U\| + \mu - \beta\|U\|}{1 - \beta}.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $V : Z \rightarrow \tilde{X}$  оператор заданный по формуле  $V(z) = \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}$ ,  $z \in Z$ . Учитывая условие (b) получаем

$$\begin{aligned} \|V(z)\|_{\tilde{X}} &\leq \|(U - V)(z)\|_{\tilde{X}} + \|U(z)\|_{\tilde{X}} \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \|U(z)\|_{\tilde{X}} \\ &\quad + \frac{\mu}{1 - \beta} \|z\|_Z + \|U(z)\|_{\tilde{X}} = \\ &= \frac{\lambda + 1 - \beta}{1 - \beta} \|U(z)\|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{1 - \beta} \|z\|_Z \leq \frac{(1 + \lambda)\|U\| + \mu - \beta\|U\|}{1 - \beta} \|z\|_Z, \quad z \in Z. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор  $I + (V - U)S$ . Очевидно, что  $I + (V - U)S$  линейный ограниченный оператор и  $(I + (V - U)S)U = V$ . Возьмем  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  и оценим  $(V - U)S(\tilde{x})$ . Из условия (b) имеем

$$\|(V - U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \|US(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{1 - \beta} \|S(\tilde{x})\|_Z$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \|(V - U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} &\leq \lambda\|US(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} + \mu\|S(\tilde{x})\|_Z + \beta\|(V - U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} \leq \\ &\leq (\lambda\|US\| + \mu\|S\| + \beta)\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} + \beta\|I + (V - U)S\|(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Тогда, согласно условию (a) по теореме 1 оператор  $I + (V - U)S$  ограниченно обратим и

$$\|(I + (V - U)S)^{-1}\| \leq \frac{1 + \beta}{1 - (\lambda\|US\| + \mu\|S\| + \beta)}.$$

Пусть  $T = S(I + (V - U)S)^{-1}$ . Покажем, что  $T$  есть требуемый оператор. Имеем

$$TV = S(I + (V - U)S)^{-1}V = S(I + (V - U)S)^{-1}(I + (V - U)S)U = SU = I.$$

Далее, для  $z \in Z$  получаем

$$\begin{aligned} \|z\|_Z &= \|TV(z)\|_Z \leq \|T\|\|V(z)\|_{\tilde{X}} \leq \|S\|\|(I + (V - U)S)^{-1}\|\|V(z)\|_{\tilde{X}} \leq \\ &\frac{(1 + \beta)\|S\|}{1 - (\lambda\|US\| + \mu\|S\| + \beta)} \|V(z)\|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{[1 - (\lambda\|US\| + \mu\|S\| + \beta)]\|S\|^{-1}}{1 + \beta} \|z\|_Z \leq \|V(z)\|_{\tilde{X}}, \quad z \in Z.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $(\{\varphi_n^*\}_{n \in N}, S)$  банаховый  $g_{\tilde{X}}$ -фрейм в  $Z$ , система  $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  такая, что  $\{\psi_n^*(z)\}_{n \in N} \in \tilde{X}$ ,  $z \in Z$ , операторы  $U: Z \rightarrow \tilde{X}$ ,  $V: Z \rightarrow \tilde{X}$  определены по выражениям  $U(z) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}$  и  $V(z) = \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}$ ,  $z \in Z$ . Предположим, что существуют числа  $\lambda, \mu \geq 0$  и  $\beta \in [0, 1)$ :

(a)  $\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\| < 1$ ;

(b)  $\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N} - \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} \leq \lambda\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} + \beta\|\{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} + \mu\|z\|_Z$  для любого  $z \in Z$ .

Тогда существует  $T \in L(\tilde{X}, Z)$  такой, что  $(\{\psi_n^*\}_{n \in N}, T)$  является банаховым  $g_{\tilde{X}}$ -фреймом в  $Z$ , с границами

$$[1 - (\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\|)]\|S\|^{-1}, \quad \frac{(1 + \lambda)\|U\| + \mu}{1 - \beta}.$$

**Доказательство.** Воспользуясь условием (b), получаем

$$\begin{aligned} & \|(V - U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} \leq \\ & \leq \lambda\|US(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} + \beta\|VS(\tilde{x})\|_{\tilde{X}} + \mu\|S(\tilde{x})\|_Z \leq (\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\|)\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу условия (a), оператор  $I + (V - U)S$  ограниченно обратим и

$$\|(I + (V - U)S)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - (\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\|)}.$$

Теперь оценим  $\|V(z)\|_{\tilde{X}}$  для любого  $z \in Z$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|V(z)\|_{\tilde{X}} & \leq \|(U - V)(z)\|_{\tilde{X}} + \|U(z)\|_{\tilde{X}} \leq (1 + \lambda)\|U(z)\|_{\tilde{X}} + \\ & + \beta\|V(z)\|_{\tilde{X}} + \mu\|z\|_Z, \quad z \in Z. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|V(z)\|_{\tilde{X}} \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \beta}\|U(z)\|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{1 - \beta}\|z\|_Z \leq \frac{(1 + \lambda)\|U\| + \mu}{1 - \beta}\|z\|_Z, \quad z \in Z.$$

Обозначим через  $T = S(I + (V - U)S)^{-1}$ . Так как  $TV = I$ , то для  $z \in Z$  получаем

$$\|z\|_Z = \|TV(z)\|_Z \leq \|T\| \|V(z)\|_Z \leq \|S\| \|(I + (V - U)S)^{-1}\| \|V(z)\|_{\tilde{X}} \leq \frac{\|S\|}{1 - (\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\|)} \|V(z)\|_{\tilde{X}}.$$

Таким образом, из последнего неравенства получаем

$$[1 - (\lambda\|US\| + \beta\|VS\| + \mu\|S\|)] \|S\|^{-1} \|z\|_Z \leq \|V(z)\|_{\tilde{X}}, \quad z \in Z.$$

Теорема доказана.

Из доказанных теорем, в частности, получается следующее утверждение об устойчивости банахового  $g_{\tilde{X}}$ -фрейма в банаховых пространствах ([13]).

**Следствие.** Пусть  $(\{\varphi_n^*\}, S)$  банаховый  $g_{\tilde{X}}$ -фрейм в  $Z$ , оператор  $U: Z \rightarrow \tilde{X}$  определен по равенству  $U(z) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}$ , система  $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  и  $\{\psi_n^*(z)\}_{n \in N} \in \tilde{X}$  для любого  $z \in Z$ . Предположим, что существуют числа  $\lambda, \mu \geq 0$  такие, что

- (a)  $\lambda\|U\| + \mu < \|S\|^{-1}$ ;
- (b)  $\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N} - \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} \leq \lambda\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\|_{\tilde{X}} + \mu\|z\|_Z$  для любого  $z \in Z$ .

Тогда существует  $T \in L(\tilde{X}, Z)$  такой, что  $(\{\psi_n^*\}_{n \in N}, T)$  является банаховым  $g_{\tilde{X}}$ -фреймом в  $Z$ , с границами  $\|S\|^{-1} - (\lambda\|U\| + \mu)$  и  $\|U\| + \lambda\|U\| + \mu$ .

**Теорема 4.** Пусть  $(\{\varphi_n^*\}, S)$  банаховый  $g_{\tilde{X}}$ -фрейм в  $Z$ , оператор  $U: Z \rightarrow \tilde{X}$  определен по равенству  $U(z) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}$ , система  $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  такая, что оператор  $V: Z \rightarrow \tilde{X}$  заданный по выражению  $V(z) = \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}$ ,  $z \in Z$ , удовлетворяет неравенству  $\|V\| < \|S\|^{-1}$ . Тогда существует  $T \in L(\tilde{X}, Z)$  такой, что  $(\{\varphi_n^* + \psi_n^*\}_{n \in N}, T)$  является банаховым  $g_{\tilde{X}}$ -фреймом в  $Z$  с границами

$$(1 - \|VS\|)\|S\|^{-1} \text{ и } \|U\| + \|V\|.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $\|[U + V](z)\|_{\tilde{X}} \leq (\|U\| + \|V\|)\|z\|_Z$ . Из условия  $\|V\| < \|S\|^{-1}$  следует, что оператор  $I + VS$  ограниченно обратим. Пусть  $T = S(I + VS)^{-1}$ . Тогда

$$T(U + V) = S(I + VS)^{-1}(U + V) = S(I + VS)^{-1}(I + VS)U = SU = I.$$

Далее, так как  $\|(I + VS)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|VS\|}$ , то

$$\|z\|_Z = \|[T(U+V)](z)\|_Z \leq \|S\| \|(I+VS)^{-1}\| \| [U+V](z) \|_Z \leq \frac{\|S\|}{1-\|VS\|} \| [U+V](z) \|_{\tilde{X}}$$

Отсюда имеем оценку

$$(1-\|VS\|)\|S\|^{-1} \|z\|_Z \leq \| [U+V](z) \|_{\tilde{X}}, \quad z \in Z.$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $\tilde{X} \subset \tilde{X}_p$ ,  $(1 \leq p \leq \infty)$ ,  $(\{\varphi_n^*\}_{n \in N}, S)$  банаховый  $g_{\tilde{X}}$ -фрейм в  $Z$ , оператор  $U: Z \rightarrow \tilde{X}$  задан по формуле  $U(z) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}$ , система  $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X): \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N} \in \tilde{X}$ ,  $z \in Z$ , и определен оператор  $V: Z \rightarrow \tilde{X}$ ,  $V(z) = \{\psi_n^*(z)\}_{n \in N}$ ,  $z \in Z$ . Пусть существуют  $L \in L(\tilde{X})$  и  $F_n, G_n \in L(X)$  такие, что  $L(V(z)) = U(z)$ ,  $z \in Z$ , и

$$\begin{aligned} a_1 \|x\|_X &\leq \|F_n(x)\|_X \leq a_2 \|x\|_X, \quad a_1, a_2 > 0, \quad x \in X, \quad n \in N; \\ b_1 \|x\|_X &\leq \|G_n(x)\|_X \leq b_2 \|x\|_X, \quad b_1, b_2 > 0, \quad x \in X, \quad n \in N. \end{aligned}$$

Предположим, что существуют числа  $\lambda, \mu \geq 0$  и  $\beta \in [0, 1)$ :

(a)  $\mu < a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1}$ ;

(b)  $\| \{ (F_n \varphi_n^* - G_n \psi_n^*)(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} \leq \lambda \| \{ F_n \varphi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \beta \| \{ G_n \psi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \mu \|z\|_Z$   
для любого  $z \in Z$ .

Тогда существует  $T \in L(\tilde{X}, Z)$  такой, что  $(\{\psi_n^*\}_{n \in N}, T)$  является банаховым  $g_{\tilde{X}}$ -фреймом в  $Z$ , с границами  $\frac{a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1} - \mu}{(1+\beta)b_2}$ ,  $\frac{a_2(1+\lambda)\|U\| + \mu}{(1-\beta)b_1}$ .

**Доказательство.** Для любого  $z \in Z$ , с учетом условия (b), получаем

$$\begin{aligned} \| \{ G_n \psi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} &\leq \| \{ (F_n \varphi_n^* - G_n \psi_n^*)(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \| \{ F_n \varphi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} \leq \\ &\leq (1+\lambda) \| \{ F_n \varphi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \beta \| \{ G_n \psi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \mu \|z\|_Z. \end{aligned}$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\| \{ G_n \psi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} \leq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \| \{ F_n \varphi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{1-\beta} \|z\|_Z.$$

Тогда

$$\|V(z)\|_{\tilde{X}} \leq \frac{1}{b_1} \| \{ G_n \psi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} \leq \frac{1+\lambda}{(1-\beta)b_1} \| \{ F_n \varphi_n^*(z) \}_{n \in N} \|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{(1-\beta)b_1} \|z\|_Z \leq$$

$$\leq \frac{(1+\lambda)a_2}{(1-\beta)b_1} \|U(z)\|_{\tilde{X}} + \frac{\mu}{(1-\beta)b_1} \|z\|_Z \leq \frac{a_2(1+\lambda)\|U\| + \mu}{(1-\beta)b_1} \|z\|_Z.$$

Затем, из последовательности неравенств

$$\begin{aligned} \left\| \{G_n \psi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} &\geq \left\| \{F_n \varphi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} - \left\| \{(F_n \varphi_n^* - G_n \psi_n^*)(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} \geq \\ &\geq (1-\lambda) \left\| \{F_n \varphi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} - \beta \left\| \{G_n \psi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} - \mu \|z\|_Z \end{aligned}$$

получаем, что  $\left\| \{G_n \psi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} \geq \frac{1-\lambda}{1+\beta} \left\| \{F_n \varphi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} - \frac{\mu}{1+\beta} \|z\|_Z.$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|V(z)\|_{\tilde{X}} &\geq \frac{1}{b_2} \left\| \{G_n \psi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} \geq \frac{1-\lambda}{(1+\beta)b_2} \left\| \{F_n \varphi_n^*(z)\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{X}} - \frac{\mu}{(1+\beta)b_2} \|z\|_Z \geq \\ &\geq \frac{(1-\lambda)a_1}{(1+\beta)b_2} \|U(z)\|_{\tilde{X}} - \frac{\mu}{(1+\beta)b_2} \|z\|_Z \geq \frac{a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1} - \mu}{(1+\beta)b_2} \|z\|_Z. \end{aligned}$$

Требуемым оператором служит оператор  $T = SL$ , ибо  $SLV = SU = I$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Duffin R. J., Schaeffer A. C. A Class of Nonharmonic Fourier Series// Trans. Amer. Math. Soc., 72, 1952, p. 341–366.
2. Young R. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series// New York, 1980.
3. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases// Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhuser, Boston, MA, 2002.
4. Balan R. Stability for Fourier Frames and Wavelet Riesz Bases// J. Fourier Anal. Appl., 1997, 3(5), p. 499-504.
5. Casazza P.G., Han D. and Larson D.R. Frames for Banach Space// Contemp. Math., 1999, 247, p. 149-182.
6. Casazza P.G. and Christensen O. Approximation of the Inverse Frame Operator and Applications to Gabor Frames// J. Approx. Theory 103. No2, 2000, p. 338-356.
7. Gröchenig K. Describing Functions: Atomic Decomposition Versus Frames// Monatsh. Math., 112(1), 1991, p. 1-41.
8. Christensen O., Stoeva D. p-Frames in Separable Banach Spaces// Adv. Comp. Math. 18, 2003, p. 117-126.
9. Han D., Larson D.R. Frames, Bases and Group Representations// Memoirs Amer. Math. Soc., 147:697, 2000, p. 1-91.
10. Christensen O., Heil C. Perturbations of Frames and Atomic Decompositions// Math. Nachr. 185, 1997, p. 33-47.
11. Casazza P.G. and Christensen O. Perturbation Operators and Applications to Frame Theory// J. Fourier Anal. Appl. 3, No 5, 1997, p. 543-557.
12. Jain P.K., Kaushik S.K., Vashisht, L.K. On Perturbations of Banach Frames// Int. J. Wavelet Multiresolut. Inf. Process., 4(3), 2006, p. 559-565.

13. Abdollahpour M.R., Faroughi M.H., and Rahimi A. *PG*-frames in Banach Spaces// Methods of Functional Analysis and Topology, 13, No 3, 2007, p. 201-210.
14. Zhu Y.C., Wang S.Y. The Stability of Banach Frames in Banach Spaces// Acta Mathematica Sinica, English Series, v. 26, No 12, 2010, p. 1165–1170.
15. Sun W., G-frames and G-Riesz Bases// J. Math. Anal. Appl., 322, 2006, p. 473-452.
16. Sun W., Stability of G-frames// J. Math. Anal. Appl., 326, 2007, p. 858-868.
17. Gang W. A Study on the Stability of g-Banach Frames// Advances in Mathematics Aug., v.40, No4, 2011, p. 400-406.

## $g_{\bar{x}}$ -BANACH FREYMİN HÖYƏCANLANMASI

M.I.ISMAYILOV

### XÜLASƏ

İşdə Banax fəzalarında vektor ardıcılıqlar Banax fəzasına nəzərən  $g$ -Banax freymın dayanıqlığı öyrənilir.  $g$ -Banax freymə müəyyən mənada yaxın olan sistemlə  $g$ -Banax freym cütü əmələ gətirən xətti məhdud operatorun varlığı üçün kafi şərtlər tapılıb. İşdə alınmış nəticələrdən xüsusi halda Banax fəzalarında vektor ardıcılıqlar Banax fəzasına nəzərən  $g$ -Banax freymın dayanıqlığı haqqında olan bəzi məlum nəticələr alınır.

**Açar sözlər:** freym, atomar ayrılış,  $g$ -Banax freym.

## ON PERTURBATION OF $g_{\bar{x}}$ -BANACH FRAME

M.I.ISMAYILOV

### SUMMARY

The paper deals with the stability of  $g$ -Banach frame in Banach space with respect to Banach space of vector valued sequences. The sufficient conditions under which there exists a linear bounded operator that together with the system close in definite sense to  $g$ -Banach frame forms  $g$ -Banach frame, are found. In special cases, from the results obtained in the paper, we get some known facts on stability of  $g$ -Banach frame in Banach space with respect to Banach space of vector valued sequences.

**Key words:** frame, atomic decomposition,  $g$ -Banach frame

*Поступила в редакцию: 14.10.2013 г.*

*Подписано к печати: 27.12.2013 г.*